FISICA II

PROF Frouzoui (Polo Fibonacci, Largo Pontecorvo, #3, Pisa; Ric: martedì mattina, mercoledì 7:10 30 - 13:30)

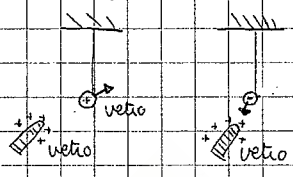
→ Elettromagnetismo

e-mail: leone.frouzoui@unipi.it

24/09/2015

ELETTRICITÀ

→ Studiata dal '700
→ Prime esperienze (vetro, mica, ma anche plastica)



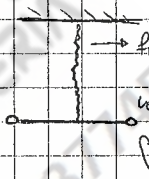
Fenomeno legato a F gravitazionale, che determina reciproca attrazione tra oggetti.

↓

Tale F è misurabile per esempio collegando con molle i 2 oggetti e osservandone i Δx, nota K

Si è pensato quindi ai 2 oggetti come 2 fluidi, uno ⊕ e uno ⊖, che si respingono se uguali.

COULOMB pensò ad una sorta di «bilancia» di torsione, che ha elevatissima sensibilità



$$F = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{K} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r} \qquad [d]$$

$\hat{r}$ è un versore, da la direzione della F, che è LUNGO la congiungente

$K \approx 8{,}97 \cdot 10^{9} \frac{Nm^2}{C^2}$

→ legato alla mediaz. di particelle (fotoni e gravitoni)

MASTER COPY PISA

$\varepsilon_0 =$

1 C = $6{,}24 \cdot 10$ elettroni

- Carica puntiforme q agisce nello spazio: a distanza pongo una carica p. di prova, che me risente: risente del campo elettrico generato anche in base alla distanza



$$\vec{E} = \lim_{p \to 0} \frac{\vec{F}}{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = \vec{E}$$

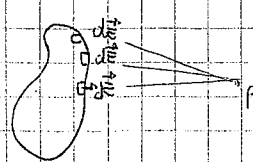
Nel C.E. si ha SOVRAPPOSIZIONE: ogni campo generato dalla singola carica non dipende dagli altri. Il risultante poi è:



$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

NB: vale per Q PUNTIFORMI

Nel caso non avessi le cariche puntiformi, x principio di sovrapposizione, la penso come composta da tanti volumetti dv, ognuno generante un campo $d\vec{E}$

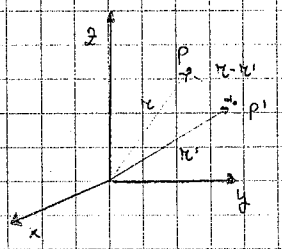


$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \qquad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

(int. di volume: corrisponde a 3 integrali)

Più chiarezza:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} \qquad \rho(x',y',z') \quad \rho = \frac{\Delta q}{\Delta v} \rightarrow \Delta q = \rho\,\Delta v$$

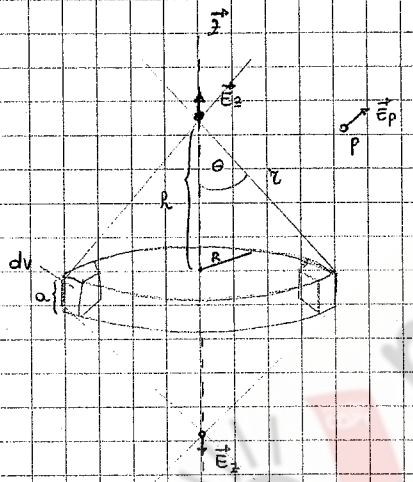
$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}\,dx'\,dy'\,dz' \qquad \boxed{\vec{E}_0 = \int \frac{\rho\,dv}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

E_{totale}: CE
$E_{gravitazionale}$: campo gravitazionale

SIMMETRIE

25 09 2015

→ DISCO / CILINDRO

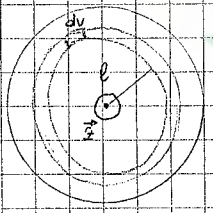


Ruotando o ribaltando (speculativamente, lungo l'asse) il disco, NON ho INVARIANZA del CE nello spazio: invarianza per ROTAZIONE e RIFLESSIONE.
(Se invece lo traslassi lungo asse avrei variaz. di $\vec{E}$ nello spazio, poiché il punto P risentirebbe di una forza diversa).

Per ogni punto $\in$ asse z, il CE è diretto unicamente lungo l'asse.

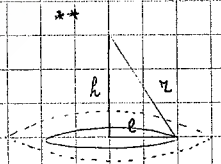
$$d\vec{E}_z = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\rho\,dv\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\,dv\,\cos\theta\,h}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \;*$$

$\rho = \frac{dq}{dv}$ $\qquad \cos\theta = \frac{h}{r}$



calcolato visto dall'alto

$dv = 2\pi l\,dl\,a$ (indica la distanza dal centro)



**

$r^2 = h^2 + l^2$

$2r\,dr = 2l\,dl$

$r\,dr = l\,dl$

$$* \quad d\vec{E}_z = \frac{h\rho\cos\theta\,2\pi a\,l\,dl}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{h\rho\,2\pi a\,l\,r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^3\,l} = \frac{h\rho a\,dr}{2\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}_z = \int d\vec{E}_z = \int_h^{\sqrt{R^2+l^2}} \frac{h\rho a\,dr}{2\varepsilon_0 r^2} = \frac{h\rho a}{2\varepsilon_0}\int_h^{\sqrt{R^2+l^2}} \frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{h\rho a}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_h^{\sqrt{R^2+l^2}} = \frac{h\rho a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) = \frac{h\rho a}{2\varepsilon_0}\frac{1}{h}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{l^2}{R^2}}}\right)$$

$$= \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{l^2}{R^2}}}\right)$$

sostituiamo l^2 con R^2

* Per $h \gg R$: $\quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}} \xrightarrow{\text{x Taylor}} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^2$

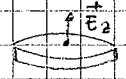
$$\vec{E}_z = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^2\right) = \frac{\rho a}{4\varepsilon_0}\left(\frac{R}{h}\right)^2 = \frac{a R^2}{4\varepsilon_0 h^2}\cdot\left(\frac{q}{\pi R^2 a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} \xrightarrow{(h\to r)} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\rho \to \frac{q}{\pi R^2 a}$

↓

CE inv. prop. ad r^2, si avvicina al CE generato da q puntiforme

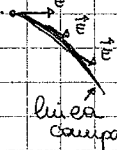
- Per $h \to 0$ $\quad \vec{E}_2 = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}}\right) \to 0 = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ indica CE nel centro del cilindro



30 09 2015

- CE è una grandezza vettoriale ed è rappresentabile con le LINEE di CAMPO

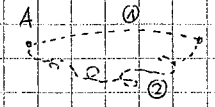
$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$; q di prova ; Q



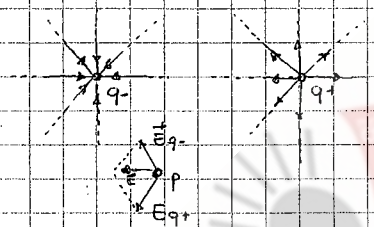
Linea di campo = curva continua che ha per tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso in quel punto

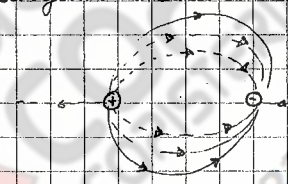
Ho molta arbitrarietà; posso avere la certezza solo quando ho ∞ punti, tutti vicini tra loro

Percorso 1 o 2 ?



- CE generata da q puntiforme: radiale, di geom. sferica

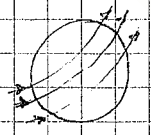




NB: Le q reali possono scomparire, la massa no: $\mathcal{E} = mc^2$

- FLUSSO attraverso SUPERFICI

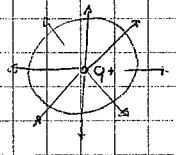
- Sup. chiusa: linee entranti = linee uscenti, se non vi sono sorgenti interne: $\Phi_{entr} < 0$, $\Phi_{usc} > 0$



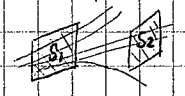
$\Phi_{entr} = -\Phi_{usc}$

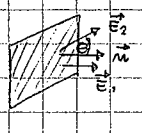
$\Phi_{entr} + \Phi_{usc} = 0$

- Se dentro avessi la q: $\Phi \neq 0$



- NB: su S_1 ho maggiore densità di linee rispetto a S_2



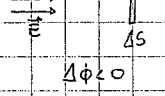
- 

$\vec{n}$ è SEMPRE normale alla sup.

se $\vec{n} \parallel \vec{E}$, max quantità di linee raccolte ($\vec{E}_1$)

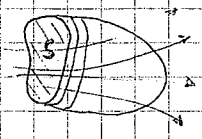
se $\vec{n} \perp \vec{E}$ ($\theta = 90°$), min " " " ($\vec{E}_2$)

- Flusso: $\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \Delta S = |\vec{E}| \cdot \Delta S \cdot \cos\theta$



$\Delta\Phi < 0 \qquad \Delta\Phi > 0$

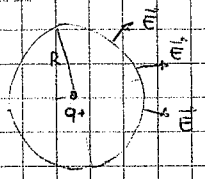
Caso generale: sup. irregolare



$\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i$

$\Phi_{TOT} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i \rightsquigarrow \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \Phi_{TOT}$

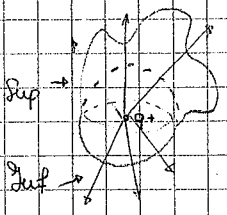
Sfera:



$$\phi = \int \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,4\pi R^2 = \boxed{\frac{q}{\varepsilon_0} = \phi}$$

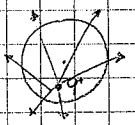
$\vec{n} \parallel \vec{E}$, $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$

Determiniamo la superficie: le linee di campo precedenti vengono di nuovo raccolte TUTTE dalla nuova sup che attraversano:



$$\phi_{TOT} = \phi_{inf} + \phi_{sup} = 2\phi_{inf} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

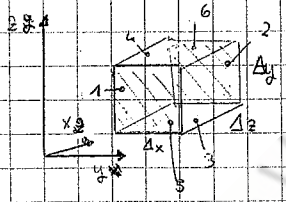
Se spostiamo all'interno della sfera, la carica q, cambia la geom delle linee di campo, ma quelle raccolte dalla sup sono sempre le stesse: ϕ è lo stesso



→ Teorema (visto ad AnII):

$$\int \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \int \operatorname{div}\vec{E}\,dV$$

Prendiamo in considerazione un cubo; ne osserviamo il ϕ attraverso le facce



$$\Delta\phi_1 = -E_x(1)\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\Delta\phi_2 = \left[E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\,\Delta z$$

* Taylor, per piccole variazioni: $E_x(2) \simeq E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x$

$$\Delta\phi_{TOT} = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = -E_x(1)\,\Delta y\,\Delta z + E_x(1)\,\Delta y\,\Delta z + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

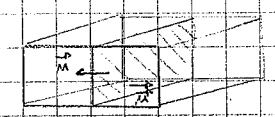
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x}\underbrace{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}_{\Delta V}$$

$$\Delta\phi_{12} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V, \quad \Delta\phi_{34} = \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta V, \quad \Delta\phi_{56} = \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta V \qquad \Delta\phi = \underbrace{\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]}_{\operatorname{div}\vec{E}}\Delta V$$

$$\phi = \int \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \int \operatorname{div}\vec{E}\,dV$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

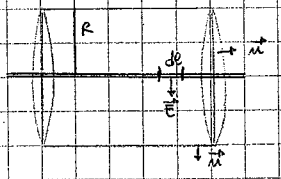
- Se prendessi 2 volumetti: $\phi_{TOT} = \phi$ attraverso nuova superficie, perché attraverso la sup interna, $\phi_1 = -\phi_2$. Quindi considero la nuova superf ext



$$\int \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV = \int \operatorname{div}\vec{E}\,dV \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

individua la densità di carica

Filo carico



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad \phi = \phi_{sup\,lat} + \phi_{sup\,base}$$

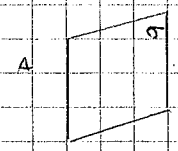
$\phi_{sup\,lat} \neq 0$, $\phi_{sup\,base} = 0$, $\vec{n} \perp \vec{E}$

$$\int_S \vec{E}\,\vec{n}\,dS = E\int dS = E \cdot 2\pi R l = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right) 2\pi R l =$$

$$= \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

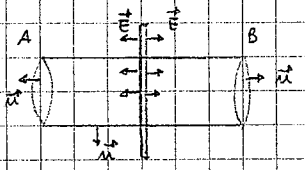
* Gauss

Superficie carica



$\sigma = \frac{dq}{dS}$

Prendiamo un cilindro



$\Phi_{TOT} = \Phi_{ext} + \Phi_{base}$ (0 / ↓)

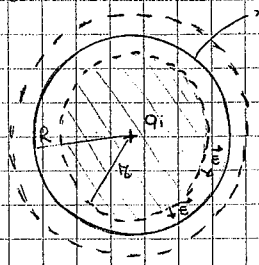
$E \cdot \Delta S + E \cdot \Delta S = 2E\Delta S$

(a dx e sx, $\vec{E} \parallel \vec{n}$)

NB: non dipende da l del cilindro.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

Σ dt 2015



Sfera con densità di carica $\rho = \frac{dq}{dv}$

Prendiamo una superficie sferica interna.

$$\Phi = \int \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \int_S |\vec{E}|\,|\vec{n}|\cos\theta\,dS = E \int_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

($\theta = 0$, $\cos 0 = 1$) ↑ T.ma Gauss

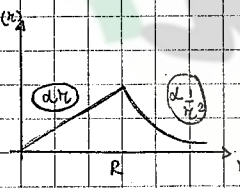
$$E = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad q_i = Q\,\frac{V_{sf\ int}}{V_{sf}} = Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2 R^3} = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E \longrightarrow \boxed{\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}}$$

⇓ varia linearmente con r

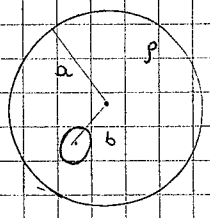
$$\Phi = |\vec{E}|\,4\pi r^2 = \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}}$$

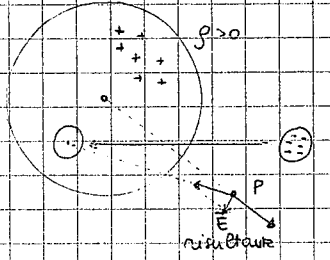


MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Sfera con buco cavo



Posso concepire la cavità come sovrapposizione: vale, per il CE, il principio di sovrapposizione. (Considero il buco come sfera di carica negativa sovrapposta alla positiva)



Calcolo CE all'esterno

NB: la q_{tot} si ottiene facendo S.V. senza considerare buco.

Calcolo CE all'interno:
- Al centro di sfera grande ho solo CE dovuto alla distrib. piccola. → $E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
Viceversa, al centro della cavità sento solo q dovuto a distribuzione grande

